

理科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \lg x \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | (x-2)(2x+1) \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 1\}$
2. 复数 $z = i(1-i)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数 $\bar{z} =$
A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
3. 某口罩厂的三个车间在一个小时内共生产 3600 个口罩,在出厂前要检查这批口罩的质量,决定采用分层抽样的方法进行抽取,若从一、二、三车间抽取的口罩数分别为 a, b, c 且 a, b, c 构成等差数列,则第二车间生产的口罩数为
A. 800 B. 1000 C. 1200 D. 1500
4. 永定土楼,位于中国东南沿海的福建省龙岩市,是世界上独一无二的神奇的山区民居建筑,是中国古建筑的一朵奇葩. 2008 年 7 月,成功列入世界遗产名录. 它历史悠久、风格独特,规模宏大、结构精巧. 土楼具体有圆形,方形,五角形,八角形,日字形,回字形,吊脚楼等类型. 现有某大学建筑系学生要重点对这七种主要类型的土楼依次进行调查研究. 要求调查顺序中,圆形要排在第一个或最后一个,方形、五角形相邻. 则共有()种不同的排法.
A. 480 B. 240
C. 384 D. 1440



5. “ $\log_3 a < \log_3 b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + 2a_4 = 4$,则 $2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot \dots \cdot 2^{a_n} =$

A. 32

B. 256

C. 512

D. 1024

7. $(x+2)(1-2x)^5$ 的展开式中含 x^2 的项的系数是

A. 70

B. 80

C. -50

D. -70

8. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$,则 $z = x - 3y$ 的最大值是

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

9. 下列函数中,既是奇函数,又在 $(0,1)$ 上单调递减的是

A. $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^x - e^{-x})$

B. $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$

C. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

D. $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

10. 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 顶点 A 作平面 α ,使 $\alpha \parallel$ 平面 A_1B_1CD , A_1D_1 和 D_1C_1 的中点分别为 E 和 F ,则直线 EF 与平面 α 所成角的正弦值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知 A, B 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右顶点和上顶点, P 为椭圆 C 上一点,若 $\triangle PAB$ 的面积是

$\sqrt{2} - 1$,则 P 点的个数为

A. 0

B. 2

C. 3

D. 4

12. 球面上两点之间的最短连线的长度,就是经过这两个点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度(大圆就是经过球心的平面截球面所得的圆),我们把这个弧长叫做两点的球面距离。已知正

$\triangle ABC$ 的顶点都在半径为2的球面上,球心到 $\triangle ABC$ 所在平面距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,则 A, B 两点间的球面距离为

A. π

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{3\pi}{4}$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填写在答题纸相应位置上.

13. 已知点 $A(-1,1)$ 、 $B(1,2)$ 、 $C(-2,-1)$ 、 $D(3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角余弦值为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 且满足 $2a_{n+1} + S_n = 2(n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

15. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 P, Q 两点(P 在第二象限, Q 在第一象限), $\overrightarrow{F_1P} = 2\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{F_1Q} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = 0$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

16. 关于函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ 有如下四个命题:

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;
- ② $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内有 3 个极值点;
- ③ $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内有 3 个零点;
- ④ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称.

其中所有真命题的序号为_____.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

据调查,目前对于已经近视的小学生,有两种配戴眼镜的选择,一种是佩戴传统的框架眼镜;另一种是佩戴角膜塑形镜,这种眼镜是晚上睡觉时佩戴的一种特殊的隐形眼镜(因其在一定程度上可以减缓近视的发展速度,越来越多的小学生家长选择角膜塑形镜控制孩子的近视发展).A 市从该地区小学生中随机抽取容量为 100 的样本,其中因近视佩戴眼镜的有 24 人(其中佩戴角膜塑形镜的有 8 人,其中 2 名是男生,6 名是女生).

(1)若从样本中选一位学生,已知这位小学生戴眼镜,那么,他戴的是角膜塑形镜的概率是多大?

(2)从这 8 名戴角膜塑形镜的学生中,选出 3 个人,求其中男生人数 X 的分布列;

(3)若将样本的频率当做估计总体的概率,请问,从 A 市的小学生中,随机选出 20 位小学生,求佩戴角膜塑形镜的人数 Y 的期望和方差.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2)在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $f(C) = 1, c = \sqrt{3}$, D 为 AB 的中点,求 CD 的最大值.

三校联考（一模）理科数学参考答案 2021.3.4

一、选择题：DBCBA CABBA CC

二、填空题：

13. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 14. $\frac{1}{2^{n-1}}$ 15. 4 16. ①③

三、解答题：

17.解：

（1）设“这位小学生佩戴眼镜”为事件 A，“这位小学生佩戴的眼镜是角膜塑形镜”为事件 B，则所求的概率为： $P(B|A)$ 1 分

$$\text{所以： } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.24} = \frac{1}{3} \quad \text{.....3 分}$$

所以若从样本中选一位学生，已知这位小学生戴眼镜，

则他戴的是角膜塑形镜的概率是 $\frac{1}{3}$4 分

（2）依题意可知：其中男生人数 X 的所有可能取值分别为：0, 1, 25 分

$$\text{其中： } P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{6}}{\frac{8 \times 7 \times 6}{6}} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14};$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^3} = \frac{2 \times \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{8 \times 7 \times 6}{6}} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28};$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_6^1}{C_8^3} = \frac{6}{\frac{8 \times 7 \times 6}{6}} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}. \quad \text{.....8 分}$$

所以男生人数 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

.....9 分

（3）由已知可得： $Y \sim B(20, 0.08)$ 10 分

则: $E(Y) = n \times p = 20 \times 0.08 = 1.6$, $D(Y) = np(1-p) = 20 \times 0.08 \times 0.92 = 1.472$

所以佩戴角膜塑形镜的人数 Y 的期望是 1.6, 方差是 1.472.12 分

18. 解: 由已知: $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x) + 1$ 2 分

$$= \sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}$$
4 分

(1) 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 得:

$f(x)$ 递减区间 $[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}]$ $k \in \mathbb{Z}$6 分

(2) 由 $f(C) = \sqrt{3} \sin(2C - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} = 1$ 知: $\sin(2C - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形 $\therefore C \in (0, \frac{\pi}{2}) \therefore 2C - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$

$$\therefore 2C - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \therefore C = \frac{\pi}{3}$$
8 分

由余弦定理得:

$$a^2 = CD^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} CD \cdot \cos \angle BDC, \quad b^2 = CD^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} CD \cdot \cos \angle ADC$$

且 $\cos \angle BDC = -\cos \angle ADC$

$$\text{故有: } CD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{3}{4}$$
10 分

$$\text{由 } 3 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

(当 $a = b$ 时, 等号成立) 即: $a^2 + b^2$ 的最大值为 6

所以: CD 的最大值为 $\frac{3}{2}$12 分

19.(1) 证明:

在 ΔA_1AC 中:

$$\because A_1C^2 = 4+1-2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3 \quad \therefore A_1C^2 + AC^2 = AA_1^2,$$

$$\therefore A_1C \perp AC \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{又 } A_1C \perp AB, AB \cap AC = A$$

$$\therefore A_1C \perp \text{平面 } ABC \quad \text{.....4 分}$$

(2) 由(1)知: A_1C, AC, BC 两两垂直,

以为 C 原点, 以 CA, CB, CA_1 所在的边为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系

$$A(1,0,0), B(0,b,0), C(0,0,0), A_1(0,0,\sqrt{3}) \quad \text{.....5 分}$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BCB_1C_1 法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CC_1} = \vec{n} \cdot \vec{AA_1} = -x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = \sqrt{3} \text{ 得: } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1) \quad \text{.....7 分}$$

$$\because \vec{BA_1} = (0, -b, \sqrt{3}) \therefore \text{由已知: } \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{BA_1} \rangle \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{b^2+3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{解得: } b=1, B(0,1,0) \quad \text{.....9 分}$$

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 A_1BB_1 的法向量

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AA_1} = -x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = -x + y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = \sqrt{3} \text{ 得: } \vec{m} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \quad \text{.....11 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{3+1}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+3+1}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{所以二面角 } A_1 - BB_1 - C \text{ 的余弦值为 } \frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \text{.....12 分}$$

20.解: (1) 由已知 $f'(x) = a^x \ln a - \ln a = \ln a(a^x - 1)$ 2 分

$$\because 0 < a < 1 \quad \therefore \ln a < 0$$

由 $f'(x) > 0$ 得: $f(x)$ 增区间 $(0, +\infty)$

由 $f'(x) < 0$ 得: $f(x)$ 减区间 $(0, -\infty)$ 4 分

$$(2) \text{ 由已知: } h(x) = a^x - x \ln a + x^2$$

设 $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m

依题意: $M - m \geq e - 1$ 5 分

$$\because h'(x) = a^x \ln a - \ln a + 2x, h'(0) = 0$$

$$\therefore h''(x) = a^x (\ln a)^2 + 2 > 0$$

$\therefore h'(x)$ 为增函数

$\therefore x > 0$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 递增;

$\therefore x < 0$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 递减.

故 $m = h(0) = 1$, $M = \max\{h(-1), h(1)\}$ 7 分

$$\text{设 } u(a) = h(1) - h(-1) = a - \frac{1}{a} - 2 \ln a, u(1) = 0$$

$$\because u'(a) = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{(a-1)^2}{a^2} \geq 0 \quad (a > 0)$$

$\therefore u(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增

$\therefore a > 1$ 时, $u(a) > 0$, 此时 $M = h(1)$

$\therefore 0 < a < 1$ 时, $u(a) < 0$, 此时 $M = h(-1)$ 9 分

当 $a > 1$ 时, $M - m = a - \ln a$

设 $G(a) = a - \ln a \quad (a > 1) \quad \therefore G'(a) = 1 - \frac{1}{a} > 0, \therefore G(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

又 $G(e) = e - 1$ 所以由 $a - \ln a \geq e - 1$ 得: $G(a) \geq G(e) \Leftrightarrow a \geq e$,

当 $0 < a < 1$ 时, $M - m = \frac{1}{a} + \ln a, \frac{1}{a} > 1,$

由 $\frac{1}{a} + \ln a \geq e - 1$ 得: $G(\frac{1}{a}) \geq G(e) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq e \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{e}$11 分

综上: a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty)$ 12 分

21. 解: (1) 将 $\ell: y = kx + 2$ 代入 $G: x^2 = 4y$ 得 $x^2 - 4kx - 8 = 0, \Delta = 16(k^2 + 2) > 0$.

令 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -8$2 分

抛物线 G 在点 A 处的切线方程为: $y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = (\frac{x_1}{2})x - \frac{x_1^2}{4}$,

抛物线 G 在点 B 处的切线方程为: $y - \frac{x_2^2}{4} = \frac{x_2}{2}(x - x_2)$, 即 $y = (\frac{x_2}{2})x - \frac{x_2^2}{4}$,3 分

联立解得点 Q 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 x_2}{4})$, 即 $Q(2k, -2)$.

所以, 点 Q 在定直线 $m: y = -2$ 上.4 分

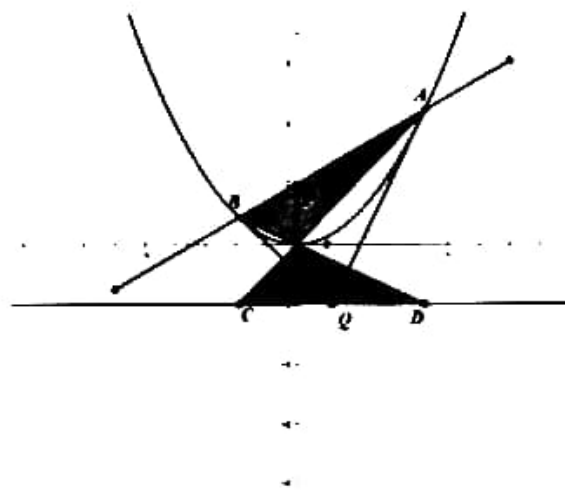
(2) (i) 将 $AO: y = (\frac{x_1}{4})x$ 与 $m: y = -2$ 联立得 $C(-\frac{8}{x_1}, -2)$.

将 $BO: y = (\frac{x_2}{4})x$ 与 $m: y = -2$ 联立得 $D(-\frac{8}{x_2}, -2)$.

$\therefore x_C = -\frac{8}{x_1} = x_2, \therefore BC \parallel y$ 轴, 同理 $AD \parallel y$ 轴,6 分

$\therefore BC \parallel AD, \therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC, \therefore \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OD|}{|OB|}$,

即 $|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|, \therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$8 分



$$(ii) |x_1 - x_2| = 4\sqrt{k^2 + 2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 4 = 4k^2 + 4,$$

$$P = S_{\text{四边形}ABCD} - 2S_{\triangle KCD}$$

$$= \frac{1}{2}(|AD| + |BC|) \cdot |CD| - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |CD|$$

$$= \frac{1}{2}[(y_1 + 2) + (y_2 + 2)] \cdot |CD| - 2|CD|$$

$$= 2(k^2 + 1)|CD|$$

.....10 分

$$= 8(k^2 + 1)\sqrt{k^2 + 2}$$

$$\text{令 } t = \sqrt{k^2 + 2}, \text{ 则 } t \geq \sqrt{2}, \text{ 令 } f(t) = 8t(t^2 - 1)(t \geq \sqrt{2}),$$

$$\because f'(t) = 8(3t^2 - 1) > 0, \therefore f(t) \text{ 在 } [\sqrt{2}, +\infty) \text{ 上递增.}$$

$$\therefore P_{\min} = f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}. \therefore k = 0 \text{ 时, } P_{\min} = 8\sqrt{2}.$$

.....12 分

22. 解:

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}) \text{ 消去参数得 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

$$\text{Q } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \text{ 所以曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 \cos^2\theta + 9\rho^2 \sin^2\theta = 9 \quad \text{.....5 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 = \frac{9}{\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}$$

$$\text{设 } T(\rho_1, \alpha), N(\rho_2, \alpha + \frac{\pi}{2}) \text{ 则:}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle TON} &= \frac{1}{2}|OM| \cdot |ON| = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha} \cdot \frac{9}{\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 9\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{81}{2} \cdot \frac{1}{9 + 16\sin^2 2\alpha} \end{aligned} \quad \text{.....8 分}$$

$$\because \sin^2 2\alpha \in [0, 1] \therefore S_{\triangle TON} \in [\frac{81}{50}, \frac{9}{2}]$$

.....10 分

23. 解: (1) 当 $x < -1$ 时, $f(x) = 1 - 2x, f(x) \geq 4 - x$, 解得 $x \leq -3$:

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 3, f(x) \geq 4 - x$, 解得 $x \geq 1$, 即为 $1 \leq x \leq 2$:

当 $x > 2$ 时, $f(x) = 2x - 1, f(x) \geq 4 - x$, 解得 $x \geq \frac{5}{3}$, 即为 $x > 2$3 分

综上可得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -3$.

所以不等式的解集为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$:5 分

(2) 由于 $|x - 2| + |x + 1| \geq |(x - 2) - (x + 1)| = 3$ (当且仅当 $-1 \leq x \leq 2$, 等号成立),

所以 $\{y | y = f(x)\}$, 故 $a \geq 3, b \geq 3$,7 分

$$2(a + b) - (ab + 4) = 2a - ab + 2b - 4 = (a - 2)(2 - b).$$

由于 $a \geq 3, b \geq 3$, 则 $a - 2 > 0, 2 - b < 0$.

即有 $(a - 2)(2 - b) < 0$, 则 $2(a + b) < ab + 4$10 分